PROF : Mr Mighri. A	Devoir De Synthèse N°1	L. IBN RACHIK	
Durée : 3 H		4è **Maths**	Date: 04-12-2007

EXERCICE N°1 (3 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

On considère dans l'équation $(E): Z^3 + 2(2\cos\theta - i)Z^2 + 4(1-2i\cos\theta)Z - 8i = 0$

1)a) Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation (E)

b) Résoudre dans l'équation (E)

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives $2i$, $-2e^{-i\theta}$ et $-2e^{i\theta}$

a) Vérifier que les points A, M et M' appartiennent à un même cercle de centre O

b) Déterminer le réel θ pour que $OAM'M''$ soit un parallélogramme

EXERCICE N°2 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

On considère la suite (α_n) des réels définis par : $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in$ on a : $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$

1) Vérifier que pour tout $n \in$ on a : $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}n$

2) On désigne par M_n le point du plan d'affixe Z_n tel que $Z_n = e^{i\alpha_n}$

a) Placer les points M_0, M_1, M_3 et M_6

b) Déterminer $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+6}})$. En déduire que les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés

c) Montrer que pour tout entier naturel n, les points M_n et M_{n+12} sont confondus

3) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $Z_{n+4} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} Z_n$

EXERCICE N°3 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{-1}{\cos x} + \frac{3}{2}$

1) Dresser le tableau de variation de f

2) On pose $h(x) = f(x) - x$

a) Etudier les variations de h . En déduire $h\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution α et que $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right[$

c) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ on a : $|f'(x)| \le \frac{2}{3}$

3) Soit (u_n) la suite réelle définie définie sur par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \ , n \in \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in$ on a : $0 \le u_n \le \frac{\pi}{6}$

b) Montrer que pour tout $n \in$ on a : $\left| u_{n+1} - \alpha \right| \leq \frac{2}{3} \left| u_n - \alpha \right|$

c) En déduire que pour tout $n \in$ on a : $\left| u_n - \alpha \right| \leq \alpha \left(\frac{2}{3} \right)^n$ puis calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

PROBLEME **(8 points)**

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

1)a) Etudier le dérivabilité de f à droite en 1

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2) Dresser le tableau de variation de f

3)a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

4) On désigne par (C) et (C') les courbes représentative de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$

a) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C)

b) Construire les courbes (C) et (C')

5) Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $g(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

b) Montrer que g realise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K à préciser

c) Montrer que $\left[g(y) = x \text{ , } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right] \Leftrightarrow \left[\cos y = \frac{2x}{1 + x^2} \text{ , } x \in [1, +\infty[\right]$

c) Montrer que g^{-1} est derivable sur K et que pour tout $x \in K$ on a $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{1 + x^2}$

d) On pose $G(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; pour $x \in [1, +\infty[$

Montrer que G est derivable sur $[1, +\infty[$ et donner $G'(x)$

En déduire que $g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -g^{-1}(x)$, pour tout $x \in [1, +\infty[$

6) On pose $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$; $n \in {}^*$

a) Montrer que pour tout $n \in {}^*$ on a : $g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq g^{-1}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite